



TITLE:

# 位相幾何的手法による集合値写像 の不動点の研究 (非線形解析学と凸 解析学の研究)

AUTHOR(S):

原, 靖浩

---

CITATION:

原, 靖浩. 位相幾何的手法による集合値写像の不動点の研究 (非線形解析学と凸解析学の研究). 数理解析研究所講究録 2011, 1755: 131-138

ISSUE DATE:

2011-08

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/171213>

RIGHT:

## 位相幾何的手法による集合値写像の不動点の研究

大阪大学大学院理学研究科 原 靖浩 (Yasuhiro Hara)  
Graduate School of Science, Osaka University

### 1 はじめに

本稿では、代数的位相幾何学的手法による不動点定理の研究について紹介する。

位相幾何学で出てくる有名な不動点定理の 1 つとして、次の Brouwer の不動点定理がある。

**Brouwer の不動点定理.**  $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$  とするとき、 $D^n$  から  $D^n$  への連続写像  $f$  はかならず  $f(x) = x$  となる点 (不動点) をもつ。

Brouwer の不動点定理は様々な形に一般化されている。位相幾何学においては、一致点定理への一般化、Lefschetz の不動点定理などが有名である。連続写像に関するこれらの定理については次節で紹介する。

代数的位相幾何学による不動点定理の証明ではホモロジー群、コホモロジー群を用いるわけであるが、集合値写像の場合は上半連続などの連続性に関する条件をつけても一般にはホモロジーやコホモロジーの準同型を導かない。そのため、通常の連続写像の不動点定理の証明をそのまま集合値写像の場合に適用することはできない。しかし、例えば、集合値写像が上半連続で各点の像が可縮であるような場合には、(コ)ホモロジーの準同型を定義できて、それを用いて不動点定理を研究することができる。このようなコホモロジーの準同型を定義できるような集合値写像とその不動点に関して知られていることについて 3 節で紹介し、4 節で集合値写像の写像度に関する最近の結果について紹介する。

本稿では位相空間はすべてパラコンパクトな Hausdorff 空間とし、位相空間の間の写像は連続写像、多様体は可微分多様体とする。

### 2 代数的位相幾何学的手法による不動点定理

$p$  次ホモロジー群 ( $p \in \mathbb{Z}$ ) は位相空間  $X$  に対して加群  $H_p(X)$  を対応させるものであり、連続写像  $f: X \rightarrow Y$  からホモロジー群の準同型  $f_*: H_p(X) \rightarrow H_p(Y)$  が誘導される。位相空間の連続写像から誘導されるホモロジー群の準同型に関して次の基本的な命題を思い出しておこう。

**命題 2.1.** (1)  $(\text{id}_X)_* = \text{id}_{H(X)}: H_*(X) \rightarrow H_*(X)$

(2)  $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$  を連続写像とすると、その写像の合成について  $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*: H_*(X) \rightarrow H_*(Z)$  が成り立つ。

この命題から、位相空間  $X$  から  $Y$  への連続写像  $f$  が同相写像のときには、 $f$  の逆写像  $f^{-1}$  を考えると、

$$(f^{-1})_* \circ f_* = (f^{-1} \circ f)_* = (\text{id}_X)_* = \text{id}_{H(X)}: H_*(X) \rightarrow H_*(X)$$

$$f_* \circ (f^{-1})_* = (f \circ f^{-1})_* = (\text{id}_Y)_* = \text{id}_{H(Y)}: H_*(Y) \rightarrow H_*(Y)$$

を得るので  $f_*$  が群の同型写像であることがわかる。したがって、同相な位相空間のホモロジー群は同型になるわけである。もっと一般に、ホモトピー同値な位相空間のホモロジー群は同型になる。

さて、ホモロジー群としては、単体的複体のホモロジー、特異ホモロジー、Čech ホモロジーなどが考えられるが、この節では(有限)単体分割可能なもののみを考えるので、そのうちどのホモロジー群を用いてもよい。位相空間が単体分割可能の場合にはすべて同じ群になるからである。もっと一般的な空間だと注意が必要になる。Brouwer の不動点定理の証明に使うのは  $D^n$  と  $\mathbb{R}^{n+1}$  の単位球面  $S^n$  のホモロジー群であり、それらのホモロジー群は次のようになる。

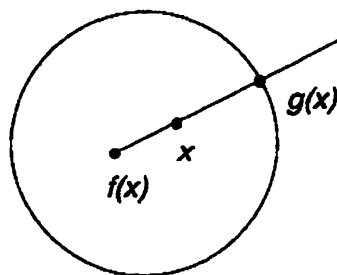
**命題 2.2.**

$$H_p(D^n) \cong \begin{cases} 0 & (p \neq 0) \\ \mathbb{Z} & (p = 0) \end{cases} \quad H_p(S^n) \cong \begin{cases} 0 & (p \neq 0, n) \\ \mathbb{Z} & (p = 0, n) \end{cases}$$

Brouwer の不動点定理は次のように証明できる。

$n = 1$  の場合は  $D^1$  は区間であり、中間値の定理から証明できるので、 $n \geq 2$  の場合に証明しよう。

連続写像  $f: D^n \rightarrow D^n$  が不動点をもたなかったとする。このとき、下の図のように  $x \in D^n$  に対して、 $f(x)$  から  $x$  を通る半直線を引いたときの  $S^{n-1}$  との交点を  $g(x)$  とすることにより  $g: D^n \rightarrow S^{n-1}$  が定義できて、 $g$  は連続写像になる。



$i: S^{n-1} \rightarrow D^n$  を包含写像とすると、

$$g_* \circ i_* = (g \circ i)_* = (\text{id}_{S^{n-1}})_* = \text{id}_{H_{n-1}(S^{n-1})}: H_{n-1}(S^{n-1}) \rightarrow H_{n-1}(S^{n-1})$$

がなりたつ。  $H_{n-1}(S^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$  であることに注意しておこう。しかしながら、 $H_{n-1}(D^n) = 0$  なので、 $i_* = 0: H_{n-1}(S^{n-1}) \rightarrow H_{n-1}(D^n)$  であり、 $g_* \circ i_* = 0$  となり矛盾する。したがって、 $f(x) = x$  となる点  $x \in D^n$  が存在することがわかる。■

$f: S^n \rightarrow S^n$  に対して,  $f_*: H_n(S^n) \rightarrow H_n(S^n)$  を考えると,  $H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$  なので任意の  $a \in H_n(S^n)$  に対して  $f_*(a) = (\deg f)a$  を満たすような整数  $\deg f$  が唯一つ定まる. この  $\deg f$  を  $f$  の写像度と呼ぶ. 上の Brouwer の不動点定理の証明と同様にして次の定理が証明できる.

**定理 2.3.**  $g: D^n \rightarrow D^n$  ( $n \geq 2$ ) を連続写像で  $D^n$  の境界  $S^{n-1}$  に対して  $g(S^{n-1}) \subset S^{n-1}$  を満たすものとする.  $\deg(g|_{S^{n-1}}) \neq 0$  が成り立つとき, 任意の連続写像  $f: D^n \rightarrow D^n$  に対して  $f(x) = g(x)$  を満たすような  $x \in D^n$  が存在する.

証明の概略を述べておこう.  $f(x) = g(x)$  を満たすような  $x \in D^n$  が存在しないと仮定するとき,  $f(x)$  から  $g(x)$  を通る半直線を引いたときの  $S^{n-1}$  との交点を  $h(x)$  とすると,  $h_* \circ i_* = (h \circ i)_* = (g|_{S^{n-1}})_*: H_{n-1}(S^{n-1}) \rightarrow H_{n-1}(S^{n-1})$  がなりたつ ( $i: S^{n-1} \rightarrow D^n$  は包含写像). 一方, Brouwer の不動点定理の証明と同様,  $i_* = 0: H_{n-1}(S^{n-1}) \rightarrow H_{n-1}(D^n)$  であることから矛盾が導かれる.

ここで挙げたような  $f(x) = g(x)$  を満たすような  $x$  を写像  $f$  と  $g$  の一致点という. 一致点を考える場合には定義域と値域の空間は同じでなくてもよい. 例えば, 有名な Borsuk-Ulam の定理「連続写像  $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  に対して,  $f(-x) = f(x)$  となる点  $x \in S^n$  が存在する」を思い出して欲しい.  $T: S^n \rightarrow S^n$  を  $T(x) = -x$  により定義するとき, Borsuk-Ulam の定理は  $f \circ T$  と  $f$  の一致点が存在するということもできる.

さて, 上では一致点について紹介したが, Brouwer の不動点定理の位相幾何学的な一般化として有名な Lefschetz の不動点定理についても紹介しておこう.

ここでは, ホモロジー群として有理数係数のホモロジーを考える. 有理数係数だと整数係数のときと違い, ホモロジー群は有理数体  $\mathbb{Q}$  上の線形空間になる. もちろん命題 2.1 のような基本的性質はかわらない. また,  $D^n$  と  $S^n$  のホモロジー群については,  $p \neq 0$  のとき  $H_p(D^n; \mathbb{Q}) \cong 0$ ,  $p = 0$  のとき  $H_p(D^n; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$ ,  $p \neq 0, n$  のとき  $H_p(S^n; \mathbb{Q}) \cong 0$ ,  $p = 0, n$  のとき  $H_p(S^n; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$  となる.

$X$  を有限次元のコンパクト多様体 (境界はあってもよい) としよう. 連続写像  $f: X \rightarrow X$  に対して,  $(f_*)_k: H_k(X; \mathbb{Q}) \rightarrow H_k(X; \mathbb{Q})$  により  $f$  から誘導される  $k$  次ホモロジー群の準同型を表すことにすると,  $f$  の Lefschetz 数  $L(f)$  は次の用に定義される.

$$\Lambda(f) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \text{tr}(f_*)_i.$$

ここで,  $\text{tr}(f_*)_i$  は線形写像  $(f_*)_i$  のトレースを表している. Lefschetz の不動点定理は次のように述べられる.

**Lefschetz の不動点定理.** 連続写像  $f: X \rightarrow X$  が  $\Lambda(f) \neq 0$  をみたすとき,  $f$  は不動点を持つ.

$X = D^n$  のときは, ホモロジー群は 0 次以外は 0 となり,  $H_0(D^n; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$  で  $\text{tr}(f_*)_0 = 1$ ,  $\text{tr}(f_*)_k = 0$  ( $k \geq 1$ ) が容易に証明できる. したがって, Lefschetz の不動点定理から Brouwer の不動点定理が証明できる.

ここでは  $X$  が有限次元の (境界つき) コンパクト多様体の場合を考えたが, 実際には, もう少し一般的なコンパクト ANR のような空間でも Lefschetz の不動点定理は成り立つ.

また, Lefschetz の不動点定理の一致点定理への拡張もあり (Lefschetz の一致点定理), [5] などに詳しく書いてある. ここでは, それについては省略する.

### 3 集合値写像の位相幾何学的研究

この節では代数的位相幾何学の手法を用いた集合値写像の不動点定理について紹介する. この節の内容については [1] が主な参考文献である. 集合値写像は一般にはホモロジーの準同型を誘導しないので, 集合値写像にいくつか条件をつけたものを考えることになる. まず, それを述べるための準備をしよう.

ここからは, ホモロジーではなく, コホモロジーを用いることにする. 後で述べる Vietori-Begle の定理が集合値写像の研究にコホモロジーを用いるために重要なので, それが成り立つような Alexander-Spanier コホモロジーもしくはČech コホモロジーを用いることにする. 以下では位相空間はすべてパラコンパクトな Hausdorff 空間とする. これらの空間に対しては, Alexander-Spanier コホモロジーとČech コホモロジーは一致する. 以下で, 位相空間  $X$  に対して  $H^p(X)$  と書くときには,  $X$  の (整数係数の)  $p$  次 Alexander-Spanier コホモロジー群 (Čech コホモロジー群でも同じ) を表している. ホモロジー群とコホモロジー群の違いの一つは連続写像  $f: X \rightarrow Y$  から誘導される準同型が  $H^p(Y)$  から  $H^p(X)$  への準同型  $f^*: H^p(Y) \rightarrow H^p(X)$  となることである. 命題 2.1. で見た性質は (1) は同様に  $(\text{id}_X)^* = \text{id}_{H(X)}: H^*(X) \rightarrow H^*(X)$  が成り立つ. (2) の方については,  $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$  を連続写像とすると, その写像の合成は  $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*: H^*(Z) \rightarrow H^*(X)$  を満たしている. コホモロジー群もホモロジー群と同様, ホモトピー不変な群である.

その他, コホモロジーについては積を考えることができるなどの長所もあるが, ここでは, それらについては述べないことにする.

位相空間  $X$  が非輪状 (acyclic) とは,  $X$  が連結であり, 任意の  $p \in \mathbb{Z}$  に対して,  $H^p(X) = 0$  となることとする. 可縮な空間はもちろん非輪状である. 位相幾何学における集合値写像の研究においては, 次の Vietoris 写像が重要になる.

定義.  $X, Y$  を位相空間とする. 全射である連続写像  $p: X \rightarrow Y$  が次の二つを満たすとき  $p$  を Vietoris 写像という.

- (i)  $p: X \rightarrow Y$  は閉写像
- (ii) 任意の  $y \in Y$  に対して, 集合  $p^{-1}(y)$  がコンパクトかつ非輪状

Vietoris 写像について, 次の Vietori-Begle の定理が成り立つ.

定理 3.1([6]).  $p: X \rightarrow Y$  が Vietoris 写像のとき,  $p^*: H^*(Y) \rightarrow H^*(X)$  は同型写像である.

さて, 本題である集合値写像について考えよう.  $X, Y$  をパラコンパクトなハウスドルフ空間とする. 以下では  $X$  から  $Y$  への集合値写像  $\varphi$  は任意の  $x \in X$  に対して  $\varphi(x)$  が  $Y$  の閉集合であるものとし,  $\varphi: X \rightarrow Y$  により表すことにする.

$\varphi: X \rightarrow Y$  において, 任意の  $x \in X$  と任意の  $\varphi(x)$  の近傍  $V$  に対して,  $x$  の近傍  $U$  で  $\varphi(U) \subset V$  を満たすものが存在するとき,  $\varphi$  は上半連続であるという.

定義.  $\varphi: X \multimap Y$  を  $X$  の各点でコンパクトな値を取るような上半連続集合値写像とする. 任意の  $x \in X$  に対して,  $\varphi(x)$  が非輪状であるとき,  $\varphi$  を非輪状写像と呼ぶ.

$\varphi$  のグラフ  $\Gamma_\varphi = \{(x, y) \in X \times Y \mid y \in \varphi(x)\}$  と射影  $p_\varphi: \Gamma_\varphi \rightarrow X, q_\varphi: \Gamma_\varphi \rightarrow Y$  を考えよう.  $\varphi: X \multimap Y$  が非輪状写像のとき,  $p_\varphi$  は Vietoris 写像である. したがって, 定理 3.1 より  $p^*: H^*(X) \rightarrow H^*(\Gamma_\varphi)$  は同型写像であり, 準同型写像  $(p_\varphi^*)^{-1}q_\varphi^*: \bar{H}^*(Y) \rightarrow \bar{H}^*(X)$  を得る. 非輪状写像は不動点定理などを研究するのに興味のある写像であるが, 次に書くような問題点もある.

$X, Y, Z$  をパラコンパクトハウスドルフ空間とする.  $\varphi: X \multimap Y, \psi: Y \multimap Z$  を各点でコンパクトな値を取るような上半連続集合値写像とすると, これらの写像の合成  $\psi \circ \varphi: X \multimap Z$  を  $x \in X$  に対して

$$(\psi \circ \varphi)(x) = \bigcup_{y \in \varphi(x)} \psi(y)$$

と定義する.  $\psi \circ \varphi: X \multimap Z$  は上半連続な集合値写像になっている.

非輪状写像全体を考えると, この集合値写像の合成で閉じていないのである. 例えば,  $\psi: S^n \multimap S^n$  を

$$\psi(x) = \{y \in S^n \mid \|x - y\| \leq 3/2\}$$

により定義すると,  $\psi$  は非輪状であるが,  $\psi \circ \psi$  は  $\psi \circ \psi(x) = S^n$  となる.  $S^n$  のコホモロジー群は  $p = n$  のとき,  $H^p(S^n) \cong \mathbb{Z}$  であり, 非輪状ではない. そこで, 非輪状写像を少し拡張して写像の合成について閉じた集合値写像のクラスを定義しよう.

定義.  $\varphi: X \multimap Y$  を  $X$  の各点でコンパクトな値を取るような上半連続集合値写像とする. パラコンパクトハウスドルフ空間  $\Gamma$  と連続写像  $p: \Gamma \rightarrow X, q: \Gamma \rightarrow Y$  が存在し,  $p$  が Vietoris 写像であり, 任意の  $x \in X$  に対して,  $q(p^{-1}(x)) \subset \varphi(x)$  が成り立つとき  $\varphi$  を **admissible** 写像と呼ぶ.

上の定義の中の  $p, q$  を **admissible** 写像  $\varphi$  の **selected pair** と呼び,  $(p, q) \subset \varphi$  により表す.  $(p, q) \subset \varphi$  のとき,  $p^*: H^*(X; \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(\Gamma; \mathbb{Z})$  が同型写像なので, 準同型写像  $(p^*)^{-1}q^*: H^*(Y; \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(X; \mathbb{Z})$  を得る.

非輪状写像はグラフとそれからの 2 つの射影を考えることにより **selected pair** が与えられ **admissible** 写像になる. 一般に **admissible** 写像の **selected pair** から得られる準同型は **selected pair** の取り方により異なる. 例えば,  $\varphi: S^n \multimap S^n$  を  $\varphi(x) = S^n$  により定義する. この  $\varphi$  は **admissible map** である.  $\Gamma = S^n, p = \text{id}_{S^n}$  とし,  $q_1$  を定値写像,  $q_2 = \text{id}_{S^n}$  とすれば,  $(p, q_1) \subset \varphi, (p, q_2) \subset \varphi$  であり,  $(p_1^*)^{-1}q_1^* = 0, (p_2^*)^{-1}q_2^* = \text{id}_{H^*(S^n)}$  となり, 異なる準同型である.

さて, 次の命題からわかるように **admissible** 写像は写像の合成について閉じている.

**命題 3.2.**  $X, Y, Z$  をコンパクトで三角形分割可能な位相空間とする.  $\varphi: X \multimap Y, \psi: Y \multimap Z$  を **admissible** 写像とする. このとき,  $\psi \circ \varphi: X \multimap Z$  は **admissible** 写像であって, 任意の **selected pair**  $(p_1, q_1) \subset \varphi, (p_2, q_2) \subset \psi$  に対して, 次式を満たすような  $\psi \circ \varphi$  の **selected pair**  $(p, q)$  が存在する.

$$(p_1^*)^{-1}q_1^*(p_2^*)^{-1}q_2^* = (p^*)^{-1}q^*$$

この命題の証明については、その概略を述べておこう。

$(p_1, q_1) \subset \varphi, (p_2, q_2) \subset \psi$  に対し次の可換図式を考える。

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \Gamma & & \\
 & \swarrow p & \downarrow g & \searrow q & \\
 X & \xleftarrow{p_1} \Gamma_1 & \xrightarrow{q_1} Y & \xleftarrow{p_2} \Gamma_2 & \xrightarrow{q_2} Z \\
 & \nwarrow f_1 & \nearrow f_2 & & 
 \end{array}$$

ここで、 $\Gamma = \{(z_1, z_2) \in \Gamma_1 \times \Gamma_2 \mid q_1(z_1) = p_2(z_2)\}$ ,  $p(z_1, z_2) = p_1(z_1)$ ,  $q(z_1, z_2) = q_2(z_2)$ ,  $f_1(z_1, z_2) = z_1$ ,  $f_2(z_1, z_2) = z_2$ ,  $g(z_1, z_2) = q_1(z_1)$  である。

$a \in \Gamma_1$  に対して  $f_1^{-1}(a)$  は  $p_2^{-1}(q_1(a))$  と同相で非輪状となる。  $p = p_1 \circ f_1$  は Vietoris 写像の合成であることから、やはり Vietoris 写像になる。 任意の  $x \in X$  に対して  $q(p^{-1}(x)) \subset (\psi \circ \varphi)(x)$  も簡単に証明でき、上の図式から誘導されるコホモロジーの準同型について考えることにより、 $(p_1^*)^{-1}q_1^*(p_2^*)^{-1}q_2^* = (p^*)^{-1}q^*$  が得られる。

さて、admissible 写像の不動点定理について紹介しよう。 まず、admissible 写像  $\varphi: X \rightarrow X$  の Lefschetz 数の定義をする。 ここでは、簡単のため  $X$  が有限次元コンパクト多様体 (境界はあってもよい) の場合について考える。 もっと一般的な場合については [1] を参考にして欲しい。  $(p, q) \subset \varphi$  とすると、線形写像  $(p^*)^{-1}q^*: H^*(X; Q) \rightarrow H^*(X; Q)$  を考えることができる。  $(p, q)$  の Lefschetz 数  $\Lambda(p, q)$  を

$$\Lambda(p, q) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \text{tr}((p^*)^{-1}q^*)_i$$

により定義できる。 admissible 写像の定義のところで述べたように、 $(p, q)$  の取り方により  $(p^*)^{-1}q^*: H^*(X; Q) \rightarrow H^*(X; Q)$  は異なる写像になるので、 $\varphi$  の Lefschetz 集合  $\Lambda(\varphi)$  を

$$\Lambda(\varphi) = \{\Lambda(p, q) \mid (p, q) \subset \varphi\}$$

と定義する。 Lefschetz 数ではなく Lefschetz 集合というのは  $\Lambda(\varphi)$  が  $Q$  の部分集合であるからである。 Lefschetz の不動点定理は次のように拡張されている。

**admissible 写像に対する Lefschetz の不動点定理 ([1]).**  $X$  を有限次元コンパクト多様体とする。 admissible 写像  $\varphi: X \rightarrow X$  に対して、 $\Lambda(\varphi) \neq \{0\}$  のとき、 $\varphi$  は  $x \in \varphi(x)$  となるような点  $x \in X$  をもつ。

$X = D^n$  のときは、通常の連続写像のときと同様、admissible 写像  $\varphi: D^n \rightarrow D^n$  の Lefschetz 集合は  $\Lambda(\varphi) = \{1\}$  となり、不動点 ( $x \in \varphi(x)$  となる点  $x$ ) を持つ。 したがって、Brouwer の不動点定理の admissible 写像への拡張も得られるわけである。

前節で通常の連続写像に関する定理の一つとして Borsuk-Ulam の定理に触れたが、Borsuk-Ulam の定理も次のように admissible 写像に拡張されている。

**admissible 写像に対する Borsuk-Ulam の定理 ([1]).**  $\varphi: S^n \rightarrow R^n$  を admissible 写像とすると、 $\varphi(x) \cap \varphi(-x) \neq \emptyset$  となるような  $S^n$  の点  $x$  が存在する。

Borsuk-Ulam の定理の一つの証明の方法は球面から球面への写像度に関する定理を用いることである。次節では admissible 写像の写像度について解説し、最近の結果についても紹介したい。

## 4 admissible 写像の写像度について

この節では森脇氏との共著の論文 [4] の結果を紹介することを目標にする。まず、次のよく知られた球面の間の連続写像の写像度に関する定理を紹介しておく ([5])。

**定理 4.1.**  $g: S^n \rightarrow S^n$  を連続写像で任意の  $x \in S^n$  に対して  $g(-x) = -g(x)$  を満たすものとするとき、 $\deg(g)$  は奇数となる。

この定理が次のように Borsuk-Ulam の定理を導く。  $f: S^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  を連続写像とする。任意の  $x \in S^n$  に対して、 $f(-x) \neq f(x)$  と仮定すると、 $f(x) - f(-x) \neq 0$  なので、 $g: S^n \rightarrow S^{n-1}$  を  $g(x) = (f(x) - f(-x))/\|f(x) - f(-x)\|$  により定義することができる。  $i: S^{n-1} \rightarrow S^n$  を包含写像とすると、容易にわかるように  $i \circ g: S^n \rightarrow S^n$  は  $i \circ g(-x) = -i \circ g(x)$  を満たす。したがって、上の定理より  $\deg(i \circ g)$  は奇数である。一方、 $(i \circ g)_* = i_* \circ g_*$  であり、 $i_*: H_n(S^{n-1}) \rightarrow H_n(S^n)$  の  $H_n(S^{n-1})$  は 0 なので、 $\deg(i \circ g)$  は 0 でなければならず、矛盾する。よって、 $f(-x) = f(x)$  となる  $S^n$  の点  $x$  が存在する。

さて、上の定理の集合値写像への一般化を考えよう。

まず、写像度の定義を与える。  $M, N$  を向き付けられた  $n$  次元コンパクト多様体とする。以下、多様体の境界はない場合を考える。  $H^n(M; \mathbf{Z}) \cong H^n(N) \cong \mathbf{Z}$  であり、 $M, N$  には向きにあわせた  $n$  次コホモロジーの生成元が存在する。それをそれぞれ  $u_M, u_N$  により表す。

$\varphi: M \multimap N$  を admissible 写像とし、その selected pair  $(p, q) \subset \varphi$  に対して、 $(p, q)$  の写像度  $\deg(p, q)$  を  $(p^*)^{-1}q^*(u_N) = \deg(p, q)u_M$  を満たすものとして定義する。また、 $\varphi$  の写像度  $\text{Deg}\varphi$  を

$$\text{Deg}\varphi = \{\deg(p, q) \mid (p, q) \subset \varphi\}$$

により定義する。  $\text{Deg}\varphi$  は整数の部分集合である。例えば、 $\varphi: S^n \multimap S^n$  を各点  $x \in S^n$  に対して、 $\varphi(x) = S^n$  により定義するとき、 $\text{Deg}\varphi = \mathbf{Z}$  である。

定理の一般化についてであるが、「 $f: S^n \rightarrow S^n$  が  $f(-x) = -f(x)$  を満たす」の部分、集合値写像の場合にどのような条件にするかが一つの問題である。例えば、 $\varphi(-x) = -\varphi(x)$  や  $\varphi(-x) \cap (-\varphi(x)) \neq \emptyset$  という条件をまず思い浮かべるが、その場合には  $\text{Deg}\varphi$  が必ず奇数を含むかはわからない。例えば、 $\varphi: S^2 \rightarrow S^2$  を任意の  $x \in S^2$  に対して  $\varphi(x) = \{(y_0, y_1, y_2) \in S^2 \mid y_2 = 0\}$  と定義すると、 $\varphi$  は admissible 写像で  $\varphi(-x) = -\varphi(x)$  をみたし、 $\text{Deg}\varphi = \{0\}$  である。

[1] には  $\varphi(-x) \cap (\varphi(x)) = \emptyset$  が  $S^n$  の各点  $x$  で成り立つとき、 $\text{Deg}\varphi \neq \{0\}$  ということが紹介されている。我々はこれをより詳しく調べ、また、定義域の多様体を一般化した。

多様体  $M$  に対して、連続写像  $T: M \rightarrow M$  が  $T^2 = \text{id}_M$  を満たすとき、 $T$  を  $M$  上の対合と呼ぶ。対合  $T$  が任意の  $x \in M$  に対して、 $T(x) \neq x$  を満たすとき  $T$  は自由な対合と呼ぶ。  $S^n$  に  $x \mapsto -x$  という写像を考えれば、これは自由な対合である。自由な対合  $T$  が存



在する  $n$  次元コンパクト多様体  $M$  からは必ず連続写像  $f: M \rightarrow S^n$  で,  $f(T(x)) = -f(x)$  を満たすものが存在することが知られている. [4] において我々は以下の定理を示した.

**定理 4.2.**  $M$  を  $n$  次元コンパクト多様体で  $M$  上には自由な対合  $T$  が存在するものとする. 連続写像  $f: M \rightarrow S^n$  で,  $f(T(x)) = -f(x)$  を満たし,  $\deg f$  が奇数となるようなものが存在するとき, admissible 写像  $\varphi: M \rightarrow S^n$  がすべての  $x \in M$  に対して,  $\varphi(T(x)) \cap \varphi(x) = \emptyset$  を満たすならば, 唯一つの奇数  $m$  が存在して  $\text{Deg}\varphi = \{m\}$  となる.

注意. [4] においては, 2 重被覆  $M \rightarrow M_T$  ( $M_T$  は  $T$  の作用による商空間) の第 1 Stiefel-Whitney 類  $c(M, T)$  が  $c(M, T)^n \neq 0$  を満たすという条件を付けているが, これは, 連続写像  $f: M \rightarrow S^n$  で,  $f(T(x)) = -f(x)$  を満たし,  $\deg f$  が奇数となるようなものが存在するということと同値である.

$n$  次元コンパクト多様体  $M$  上の自由な対合  $T$  が  $H^n(M; \mathbb{Z})$  の生成元  $u_M$  に対して,  $T_*(u_M) = u_M$  を満たすとき,  $T$  は向きを保つ対合,  $T_*(u_M) = -u_M$  を満たすとき,  $T$  は向きを変える対合と呼ぶ.  $S^n$  の各点  $x$  で  $\varphi(-x) \cap (-\varphi(x)) = \emptyset$  が成り立つ場合には, 次の定理を得る.

**定理 4.3.**  $M$  を  $n$  次元コンパクト多様体で  $M$  上には自由な対合  $T$  が存在するものとする. このとき, admissible 写像  $\varphi: M \rightarrow S^n$  がすべての  $x \in M$  に対して,  $\varphi(T(x)) \cap (-\varphi(x)) = \emptyset$  を満たすならば, 唯一つの偶数  $m$  が存在して  $\text{Deg}\varphi = \{m\}$  となる. 特に  $T$  が向きを変えるならば,  $\text{Deg}\varphi = \{0\}$  である.

$\varphi: S^n \rightarrow S^n$  を各点  $x \in S^n$  に対して  $\varphi(x) = S^n$  により定義するとき  $\text{Deg}\varphi = \mathbb{Z}$  となることを述べたが, もっと一般に次のことが成り立つ.

**定理 4.4.**  $M$  を  $n$  次元コンパクト多様体とする. このとき, admissible 写像  $\varphi: M \rightarrow S^n$  がある  $a \in M$  に対して,  $\varphi(a) = S^n$  を満たし, その  $a$  に対して  $\varphi$  の selected pair  $(p, q)$  で  $p^{-1}(a)$  が可縮となるようなものが存在すれば,  $\text{Deg}\varphi = \mathbb{Z}$  となる.

## 参考文献

- [1] L. Górniewicz, *Topological fixed point theory of multivalued mappings*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1999.
- [2] L. Górniewicz and A. Granas, Fixed point theorems for multi-valued mappings of the absolute neighbourhood retracts. J. Math. Pures Appl. (9) 49 (1970), 381–395.
- [3] A. Granas and J. Dugundji, *Fixed Point Theory*, Springer-Verlag, 2004.
- [4] Y. Hara and Y. Moriwaki, The degree of admissible maps from manifolds to spheres, preprint.
- [5] M. Nakaoka, 不動点定理とその周辺, 岩波書店, 1977.
- [6] E. Spanier, *Algebraic topology*, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1966.